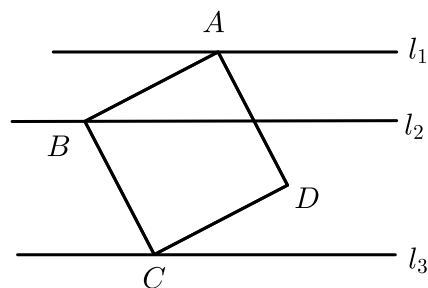


相似三角形进阶一加油站

一、一线三垂直综合

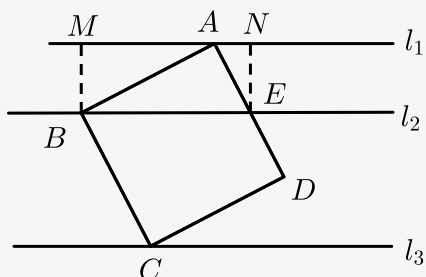
1. 一线三垂直相似模型

1. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，正方形 $ABCD$ 的三个顶点 A 、 B 、 C 分别在 l_1 、 l_2 、 l_3 上， l_1 与 l_2 之间的距离是2， l_2 与 l_3 之间的距离是4，则正方形 $ABCD$ 的面积为 _____ 。



【答案】 20

【解析】 方法一：设 AD 与 l_2 交于点 E ，过点 B 、 E 向 l_1 作垂线，分别交 l_1 于点 M 、 N ，



易知 $\triangle AEN \sim \triangle BAM$ ，

又 $\because AB:AE = 2:1$ ， $BM = EN = 2$ ，

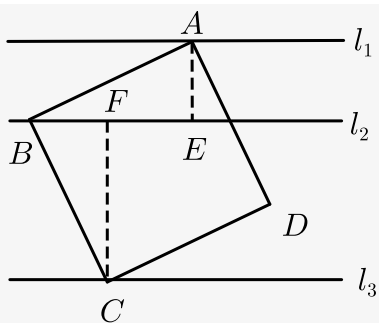
$\therefore AM = 4$ ， $AN = 1$ 。

$\therefore S_{\text{正方形}ABCD} = 4S_{\triangle ABE}$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times (4 + 1)$$

$= 20$ 。

方法二：过点 A 作 $AE \perp l_2$ ，过点 C 作 $CF \perp l_2$ ，

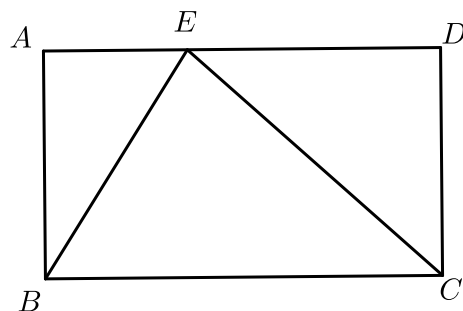


$\therefore \angle CBF + \angle BCF = 90^\circ$,
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,
 $\therefore AB = BC = CD = AD$,
 $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ABE + \angle CBF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ABE = \angle BCF$,
 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle BFC \\ \angle ABE = \angle BCF , \\ AB = BC \end{cases}$$
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF (\text{AAS})$,
 $\therefore BF = AE$,
 $\therefore BF^2 + CF^2 = BC^2$,
 $\therefore BC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$.
 故答案为 : 20 .

【标注】【知识点】一线三等角相似

2. 在一块长为8、宽为 $2\sqrt{3}$ 的矩形中，恰好截出三块形状相同、大小不等的直角三角形，且三角形的顶点都在矩形的边上．其中面积最小的直角三角形的较短直角边的长是 _____ ．



【答案】 2

【解析】 根据题意，截出的三角形是相似三角形，

设 $AE = x$, 则 DE 边为 $8 - x$,

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DEC$,

$$\therefore \frac{AE}{CD} = \frac{AB}{DE} ,$$

$$\text{即 } \frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{8-x} ,$$

整理得 $x^2 - 8x + 12 = 0$,

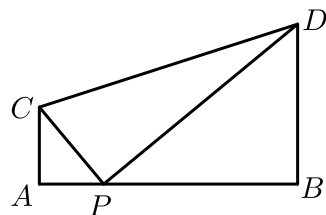
解得 $x_1 = 2, x_2 = 6$ (舍去) ,

因此较短直角边的长为 2 .

故答案为 : 2 .

【标注】【知识点】一线三等角相似

3. 如图 , $AC \perp AB$, $BD \perp AB$, $AB = 10$, $AC = 2$. 用一个三角尺进行如下操作 : 将直角顶点 P 在线段 AB 上滑动 , 一直角边始终经过点 C , 另一直角边与 BD 相交于点 D , 若 $BD = 8$, 求 AP 的长 .



【答案】 2或8 .

【解析】 $\because AC \perp AB$, $BD \perp AB$,

$$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle APC + \angle ACP = 90^\circ ,$$

$$\because \angle CPD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle APC + \angle DPB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DPB = \angle ACP ,$$

$$\therefore \triangle CAP \sim \triangle PBD ,$$

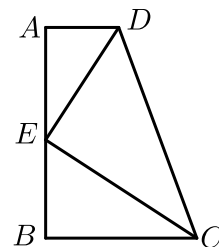
$$\therefore AC : AP = BP : BD ,$$

$$\therefore 2 : AP = (10 - AP) : 8 ,$$

解得 $AP = 2$ 或 8 .

【标注】【知识点】一线三等角相似

4. 如图 , 在四边形 $ABCD$ 中 , $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, 点 E 在 AB 上 , $\angle DEC = 90^\circ$.



(1) 求证： $\triangle ADE \sim \triangle BEC$.

(2) 若 $AD = 1$, $BC = 3$, $AE = 2$, 求 AB 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

$$(2) AB = \frac{7}{2} .$$

【解析】 (1) $\because AD \parallel BC$, $AB \perp BC$,

$$\therefore AD \perp AB , \angle B = \angle A = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle AED = 90^\circ ,$$

$$\text{又} \because \angle AED + \angle BEC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BEC ,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BEC .$$

(2) $\because \triangle ADE \sim \triangle BEC$,

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{AD}{BE} ,$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{1}{BE} ,$$

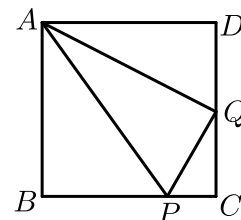
$$\therefore BE = \frac{3}{2} ,$$

$$\therefore AB = AE + EB = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} .$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

5. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中， P 是 BC 上的点，且 $BP = 3$, $PC = 1$, Q 是 CD 的中点 . 求证：

(1) $AQ \perp QP$; (2) $\triangle ADQ \sim \triangle AQP$.



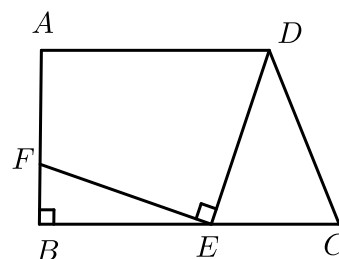
【答案】 证明见解析 .

【解析】 $\because$ 已知正方形 $ABCD$ 中， P 是 BC 上的点， $BP = 3$, $PC = 1$, Q 是 CD 的中点，

$\therefore BC = DC$,
 $\therefore DC = CP + BP = 4$,
 $\therefore Q$ 是 CD 的中点 ,
 $\therefore DQ = QC = 2$,
 则 $QC : CP = AD : DQ = 2$,
 又 $\therefore \angle ADC = \angle PCQ = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle PCQ \sim \triangle ADQ$,
 $\therefore \angle AQP = 180^\circ - \angle AQD - \angle PQC = 180^\circ - \angle QPC - \angle PQC = \angle PCQ = 90^\circ$,
 $\therefore AQ \perp QP$.
 $\therefore AQ = 2\sqrt{5}$, $PQ = \sqrt{5}$, $AP = 5$,
 $\therefore AD : AQ = DQ : QP = AQ : AP = 2 : \sqrt{5}$,
 $\therefore \triangle ADQ \sim \triangle AQP$.

【标注】【知识点】一线三等角相似

6. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，已知 $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 7$ ， $AD = 9$ ， $BC = 12$ ，在线段 BC 上任取一点 E ，连接 DE ，做 $EF \perp DE$ ，交直线 AB 于点 F 。

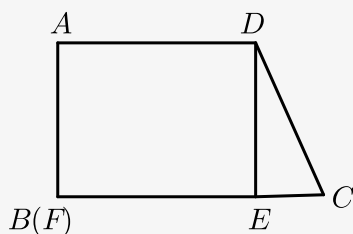


- (1) 若点 F 与 B 重合，求 CE 的长。
 (2) 若点 F 在线段 AB 上，且 $AF = CE$ ，求 CE 的长。

【答案】 (1) $CE = 3$.

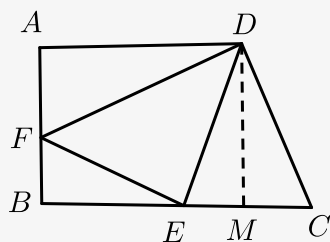
(2) $CE = 5$.

【解析】 (1) 当 F 与 B 重合时，



$\because \angle B = 90^\circ$,
 $\therefore AB \perp BC$,
 $\therefore AB \parallel DE$,
 $\therefore AD \parallel BC$,
 $\therefore$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形 ,
 $\therefore AD = EF = 9$,
 $\therefore CE = BC - EF = 12 - 9 = 3$.

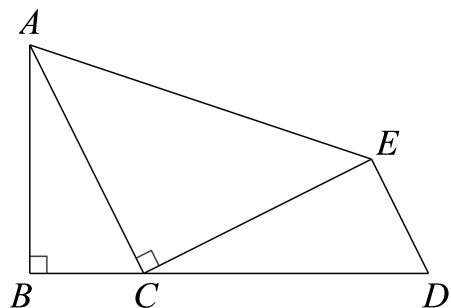
(2) 过点 D 作 $DM \perp BC$ 于 M ,



$\because \angle B = 90^\circ$,
 $\therefore AB \perp BC$,
 $\therefore AB \parallel DM$,
 $\therefore AD \parallel BC$,
 $\therefore$ 四边形 $ABMD$ 是矩形 ,
 $\therefore AD = BM = 9$, $AB = DM = 7$, $CM = 12 - 9 = 3$,
 设 $AF = CE = a$, 则 $BF = 7 - a$, $EM = a - 3$, $BE = 12 - a$,
 $\because \angle DEF = \angle B = \angle DMB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle FEB + \angle DEM = 90^\circ$, $\angle BFE + \angle FEB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BFE = \angle DEM$,
 $\because \angle B = \angle DME$,
 $\therefore \triangle FBE \sim \triangle EMD$,
 $\therefore \frac{BF}{EM} = \frac{BE}{DM}$,
 $\therefore \frac{7-a}{a-3} = \frac{12-a}{7}$,
 解得 $a = 5$, $a = 17$,
 $\because$ 点 F 在线段 AB 上 , $AB = 7$,
 $\therefore AF = CE = 17$ (舍去) , 即 $CE = 5$.

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $BC = 2$ ，以 AC 为边作 $\triangle ACE$ ， $\angle ACE = 90^\circ$ ， $AC = CE$ ，延长 BC 至点 D ，使 $CD = 5$ ，连接 DE ．求证： $\triangle ABC \sim \triangle CED$ ．



【答案】 证明见解析．

【解析】 $\because \angle B = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $BC = 2$ ．

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$\because CE = AC,$$

$$\therefore CE = 2\sqrt{5}.$$

$$\because CD = 5,$$

$$\therefore \frac{AB}{CE} = \frac{AC}{CD}.$$

$$\because \angle B = 90^\circ, \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle BCA = 90^\circ, \angle BCA + \angle DCE = 90^\circ.$$

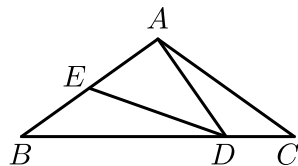
$$\therefore \angle BAC = \angle DCE.$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle CED.$$

【标注】 【知识点】相似三角形的性质与判定综合

2. 一线三等角相似模型

8. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 8$ ， D 、 E 分别为 BC 、 AB 边上一点， $\angle ADE = \angle C$ ．



(1) 求证： $\triangle BDE \sim \triangle CAD$ ．

(2) 若 $CD = 2$ ，求 BE 的长．

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $BE = 2.4$.

【解析】(1) $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle C.$$

$$\because \angle ADE + \angle BDE = \angle ADB = \angle C + \angle CAD,$$

$$\angle ADE = \angle C,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle CAD.$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CAD.$$

(2) 由(1)知 $\triangle BDE \sim \triangle CAD$, $\therefore \frac{BD}{CA} = \frac{BE}{CD}$.

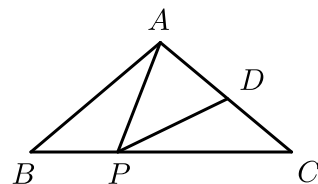
$$\because AB = AC = 5, BC = 8, CD = 2,$$

$$\therefore DB = BC - CD = 6.$$

$$\therefore BE = \frac{DB \times CD}{AC} = \frac{6 \times 2}{5} = 2.4.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 P 、 D 分别是 BC 、 AC 边上的点, 且 $\angle APD = \angle B$.



(1) 求证: $AC \cdot CD = CP \cdot BP$.

(2) 若 $AB = 10$, $BC = 12$, 当 $PD \parallel AB$ 时, 求 BP 的长.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $BP = \frac{25}{3}$.

【解析】(1) $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because \angle APD = \angle B,$$

$$\therefore \angle APD = \angle B = \angle C,$$

$$\because \angle APC = \angle BAP + \angle B, \angle APC = \angle APD + \angle DPC,$$

$$\therefore \angle BAP = \angle DPC,$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle PCD,$$

$$\therefore \frac{BP}{CD} = \frac{AB}{PC},$$

$$\therefore AB \cdot CD = CP \cdot BP,$$

即 $AC \cdot CD = CP \cdot BP$.

(2) $\because PD \parallel AB$,

$$\therefore \angle DPC = \angle B ,$$

$$\therefore \angle PAB = \angle B ,$$

$$\text{又 } \angle B = \angle C ,$$

$$\therefore \angle PAB = \angle C ,$$

$$\text{又 } \angle PBA = \angle ABC ,$$

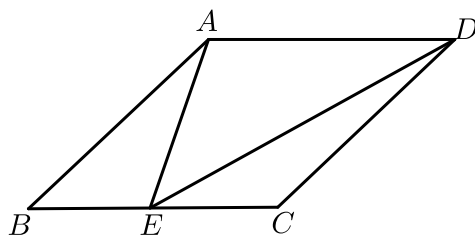
$$\therefore \triangle PBA \sim \triangle ABC ,$$

$$\therefore \frac{BP}{AB} = \frac{AB}{BC} ,$$

$$\therefore BP = \frac{AB^2}{BC} = \frac{10^2}{12} = \frac{25}{3} .$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

10. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中， E 为 BC 边上一点， $\angle AED = \angle B$.



(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle DEA$.

(2) 若 $AB = 4$, 求 $AE \cdot DE$ 的值 .

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) $AE \cdot DE = AB^2 = 16$.

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形 ,

$$\therefore AD \parallel BC .$$

$$\therefore \angle AEB = \angle EAD .$$

$$\text{又 } \because \angle B = \angle AED ,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DEA .$$

(2) $\because \triangle ABE \sim \triangle DEA$,

$$\therefore \frac{AE}{DA} = \frac{AB}{DE} .$$

$$\therefore AE \cdot DE = AB \cdot DA .$$

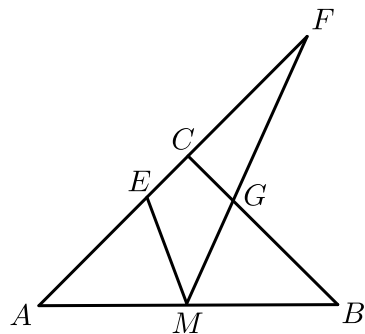
$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是菱形} , AB = 4 ,$$

$$\therefore AB = DA = 4 .$$

$$\therefore AE \cdot DE = AB^2 = 16.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

11. 如图，已知：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4$ ， M 是边 AB 的中点， E 、 G 分别是边 AC 、 BC 上的一点， $\angle EMG = 45^\circ$ ， AC 与 MG 的延长线相交于点 F ，



- (1) 在不添加字母和线段的情况下写出图中一定相似的三角形，并证明其中的一对；
 (2) 联结 EG ，当 $AE = 3$ 时，求 EG 的长。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $\frac{5}{3}$ 。

【解析】(1) $\triangle EAM \sim \triangle MBG$ (一线三等角型)、 $\triangle FME \sim \triangle FAM$ (共边斜A型)。

(2) 由 $\triangle EAM \sim \triangle MBG$ 可得 $\frac{EA}{MB} = \frac{AM}{BG}$ 即 $\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{BG}$ ， $\therefore BG = \frac{8}{3}$ ，进而

$$CG = \frac{4}{3},$$

在 $Rt\triangle CEG$ 中，由勾股定理可得 $EG = \frac{5}{3}$ ，

或者由中点型一线三等角可得 $\triangle EAM \sim \triangle EMG$ ，对可解 $\triangle EAM$ 化斜为直

(过 E 作 $EH \perp AM$ 于 H) 计算出 $EM = \sqrt{5}$ ， $\therefore \frac{EA}{EM} = \frac{EM}{EG}$ ，

即 $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{EG}$ ， $\therefore EG = \frac{5}{3}$ 。

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

12. 如图1， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是两个全等的等腰直角三角形， $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$ ， $\triangle DEF$ 的顶点 E 与 $\triangle ABC$ 的斜边 BC 的中点重合。将 $\triangle DEF$ 绕点 E 旋转到如图2，线段 DE 与线段 AB 相交于点 P ，线段 EF 与线段 CA 的延长线相交于点 Q 。

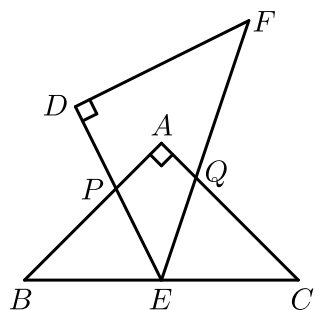


图1

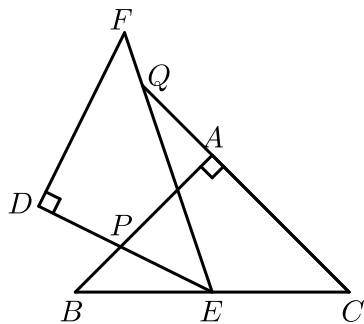


图2

(1) 求证： $\triangle BPE \sim \triangle CEQ$.

(2) 已知 $BP = a$, $CQ = \frac{9}{2}a$, 求 P 、 Q 两点间的距离 (用含 a 的代数式表示) .

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) $\frac{5}{2}a$.

【解析】(1) $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是两个全等的等腰直角三角形 ,

$$\therefore \angle B = \angle C = \angle DEF = 45^\circ ,$$

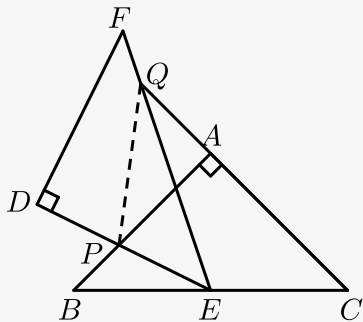
$$\therefore \angle BEP + \angle CEQ = 135^\circ , \angle CQE + \angle CEQ = 135^\circ ,$$

$$\therefore \angle BEP = \angle CQE ,$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle C = 45^\circ ,$$

$$\therefore \triangle BPE \sim \triangle CEQ .$$

(2) 连接 PQ ,



$$\because \triangle BPE \sim \triangle CEQ ,$$

$$\therefore \frac{BP}{CE} = \frac{BE}{CQ} ,$$

$$\because BP = a , CQ = \frac{9}{2}a , BE = CE ,$$

$$\therefore BE = CE = \frac{3}{2}\sqrt{2}a ,$$

$$\therefore BC = 3\sqrt{2}a ,$$

$$\therefore AB = AC = 3a ,$$

$$\therefore AQ = \frac{3}{2}a , PA = 2a ,$$

$$\text{在Rt}\triangle APQ\text{中}, PQ = \sqrt{AQ^2 + AP^2} = \frac{5}{2}a.$$

【标注】【知识点】一线三等角相似

13. 阅读理解：

如图1，若在四边形 $ABCD$ 的边 AB 上任取一点 E （点 E 与点 A, B 不重合），分别连结 ED, EC ，可以把四边形 $ABCD$ 分成三个三角形，如果其中有两个三角形相似，我们就把 E 叫做四边形 $ABCD$ 的边 AB 上的相似点；如果这三个三角形都相似，我们就把 E 叫做四边形 $ABCD$ 的边 AB 上的强相似点。

解决问题：

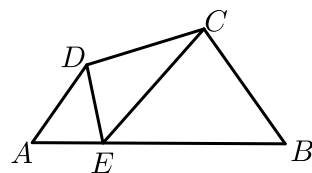


图 1

- (1) 如图1，若 $\angle A = \angle B = \angle DEC = 50^\circ$ ，试判断点 E 是否是四边形 $ABCD$ 的边 AB 上的相似点，并说明理由。
- (2) 如图2，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5, BC = 2$ ，且 A, B, C, D 四点均在正方形网格（网格中每个小正方形的边长为1）的格点（即每个小正方形的顶点）上，试在图2中画出矩形 $ABCD$ 的边 AB 上的一个强相似点 E 。

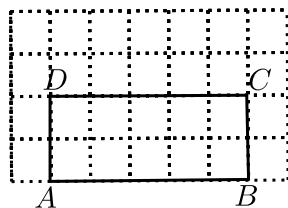


图 2

【答案】(1) 点 E 是四边形 $ABCD$ 的边 AB 上的相似点。

(2) 画图见解析。

【解析】(1) 点 E 是四边形 $ABCD$ 的边 AB 上的相似点。

理由： $\because \angle A = 50^\circ$,

$\therefore \angle ADE + \angle DEA = 130^\circ$ 。

$\because \angle DEC = 50^\circ$,

$\therefore \angle BEC + \angle DEA = 130^\circ$ 。

$\therefore \angle ADE = \angle BEC$ 。

$$\because \angle A = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BEC.$$

$\therefore$ 点 E 是四边形 $ABCD$ 的 AB 边上的相似点.

(2) 画图如下:

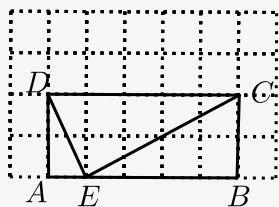


图 1

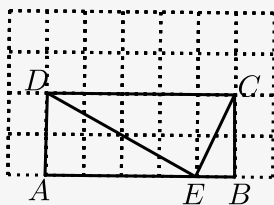


图 2

【标注】【知识点】与三角形有关的新定义

二、相似三角形常用辅助线

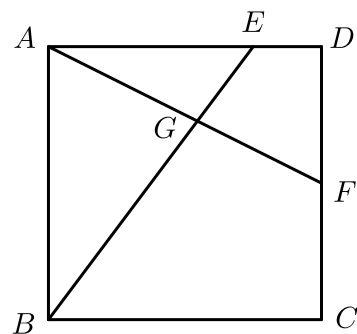
14. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别在边 AD 、 CD 上, AF 、 BE 相交于点 G , 若 $AE = 3ED$, $DF = CF$, 则 $\frac{AG}{GF}$ 的值是 ().

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{5}{4}$

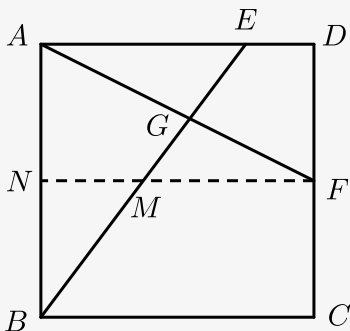
C. $\frac{6}{5}$

D. $\frac{7}{6}$



【答案】 C

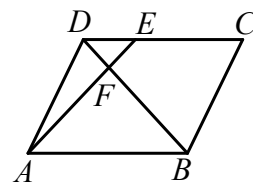
【解析】 如图, 作 $FN \parallel AD$, 交 AB 于 N , 交 BE 于 M ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,
 $\therefore AB \parallel CD$,
 $\therefore FN \parallel AD$,
 $\therefore$ 四边形 $ANFD$ 是平行四边形 ,
 $\therefore \angle D = 90^\circ$,
 $\therefore$ 四边形 $ANFD$ 是矩形 ,
 $\therefore AE = 3DE$, 设 $DE = a$,
 则 $AE = 3a$, $AD = AB = CD = FN = 4a$, $AN = DF = 2a$,
 $\therefore AN = BN$, $MN \parallel AE$,
 $\therefore BM = ME$,
 $\therefore MN = \frac{3}{2}a$,
 $\therefore FM = \frac{5}{2}a$,
 $\therefore AE \parallel FM$,
 $\therefore \frac{AG}{GF} = \frac{AE}{FM} = \frac{3a}{\frac{5}{2}a} = \frac{6}{5}$,
 故选 C .

【标注】【知识点】相似模型的构造和应用

15. 如图 , 平行四边形 $ABCD$ 中 , 点 E 是边 DC 的一个三等分点 ($DE < CE$) , AE 交对角线 BD 于点 F , 则 $S_{\triangle DEF} : S_{\triangle ABF}$ 等于 () .



- A. 1 : 3 B. 3 : 1 C. 1 : 9 D. 9 : 1

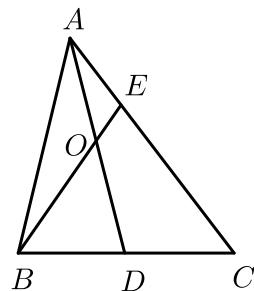
【答案】 C

【解析】 设 $DE = a$, $EC = 2a$, 则 $CD = 3a$,
 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 ,
 $\therefore AB = CD = 3a$, $DE \parallel AB$,
 $\therefore \triangle DEF \sim \triangle BAF$,
 $\therefore \frac{EF}{AF} = \frac{DE}{AB} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$,
 $\therefore S_{\triangle DEF} : S_{\triangle ABF} = 1 : 9$,

故选：C．

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 边的中点， E 为 AC 边上的任意一点， BE 交 AD 于点 O ．



- (1) 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$ 时，求 $\frac{AO}{AD}$ 的值．
 (2) 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 时，求 $\frac{AO}{AD}$ 的值．
 (3) 猜想 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{n+1}$ 时 $\frac{AO}{AD}$ 的值，并证明你的猜想．

【答案】(1) $\frac{AO}{AD} = \frac{2}{3}$ ．

(2) 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$ 时， $\frac{AO}{AD} = \frac{1}{2}$ ；
 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ 时， $\frac{AO}{AD} = \frac{2}{5}$ ．

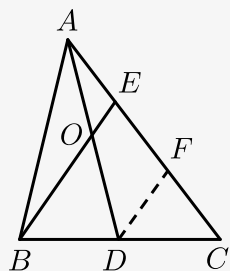
(3) $\frac{AO}{AD} = \frac{2}{2+n}$ ．

【解析】(1) 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ 时， $\frac{AO}{AD} = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$ ．

(2) 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$ 时， $\frac{AO}{AD} = \frac{1}{2}$ ；
 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ 时， $\frac{AO}{AD} = \frac{2}{5}$ ．

(3) 方法一：当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{n+1}$ 时， $\frac{AO}{AD} = \frac{2}{2+n}$ ．

如图，过点 D 作 $DF \parallel BE$ ，交 AC 于点 F ．



$\because DF \parallel BE$ ， $BD = CD$ ，

$\therefore EF = CF$ ，

$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{1}{n+1}$ ，

$$\therefore CE = nAE, EF = \frac{1}{2}CE = \frac{n}{2}AE,$$

$$\therefore DF \parallel BE,$$

$$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{AE}{EF} = \frac{2}{n} \Rightarrow \frac{AO}{AD} = \frac{2}{2+n}.$$

方法二：看 $\triangle ADC$ 被直线 BOE 所截可知

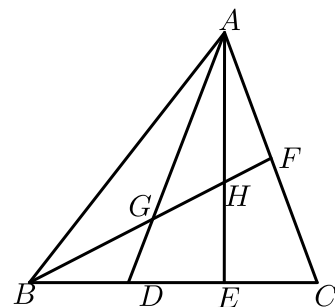
$$\frac{AO}{OD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$$

$$\text{而 } \frac{AE}{AC} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow CE = nAE, BD = CD,$$

$$\text{故 } \frac{AO}{AD} = \frac{2}{2+n}.$$

【标注】【知识点】梅涅劳斯定理

17. 如图， $\triangle ABC$ 中， E, D 是 BC 边上的三等分点， F 是 AC 的中点， BF 交 AD, AE 于 G, H ，则 $BG:GH:HF$ 等于()。



A. 1:2:3

B. 3:5:2

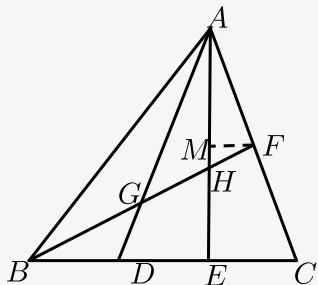
C. 5:3:2

D. 5:3:1

【答案】 C

【解析】 如图，设 $BC = 6a$ ，则 $BD = DE = EC = 2a$ ，

作 $FM \parallel BC$ 交 AE 于点 M 。



$\therefore F$ 是 AC 的中点，

$$\therefore MF = \frac{1}{2}EC = a,$$

$\therefore FM \parallel BC$,

$\therefore \triangle BEH \sim \triangle FMH$.

$$\therefore \frac{HF}{BH} = \frac{MF}{BE} = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}, \text{ 则 } HF = \frac{1}{5}BF,$$

如图1，作 $DN \parallel AC$ 交 BF 于点 N ，设 $AC = 2b$ ，则 $AF = CF = b$ ，

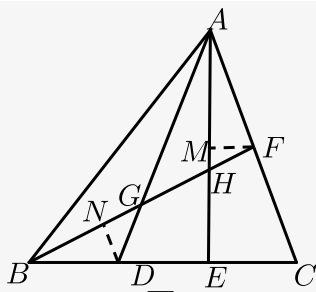


图 1

$$\therefore \triangle BDN \sim \triangle BCF.$$

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{ND}{CF} = \frac{BN}{BF} = \frac{2a}{6a} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DN = \frac{1}{3}CF = \frac{1}{3}b, BN = \frac{1}{3}BF,$$

$$\therefore DN \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle DNG \sim \triangle AFG.$$

$$\therefore \frac{NG}{GF} = \frac{DG}{AG} = \frac{\frac{1}{3}b}{b} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore NG = \frac{1}{3}GF, \text{ 即 } NG = \frac{1}{4}NF = \frac{1}{4}(BF - BN) = \frac{1}{4}\left(BF - \frac{1}{3}BF\right) = \frac{1}{6}BF,$$

$$\therefore BG = BN + NG = \frac{1}{3}BF + \frac{1}{6}BF = \frac{1}{2}BF.$$

$$\therefore GH = BF - BG - HF = BF - \frac{1}{2}BF - \frac{1}{5}BF = \frac{3}{10}BF.$$

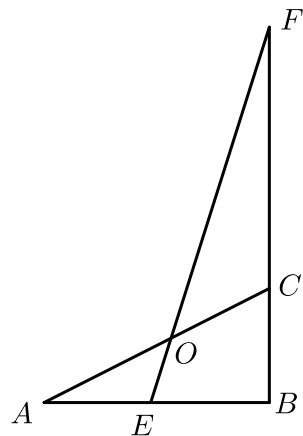
$$\therefore BG : GH : HF = \frac{1}{2}BF : \frac{3}{10}BF : \frac{1}{5}BF = 5 : 3 : 2.$$

故选C.

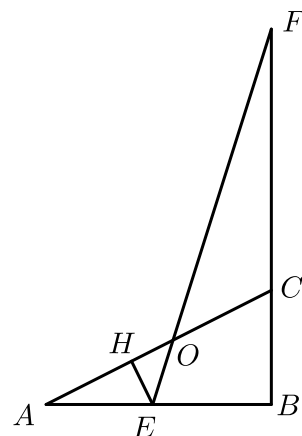
【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

18. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC = 2$, $AB = 4$, $\angle B = 90^\circ$, 点 E 从点 A 出发沿 AB 方向以每秒1个单位速度向点 B 匀速运动, 同时点 F 从点 C 出发沿 BC 的延长线方向以每秒2单位的速度运动. 当 E 点运动到点 B 时, 点 F 停止运动, 连接 EF 交 AC 于点 O , 设运动时间为 t 秒.

(1) 如图, 当 $AO = OC$ 时, 求 t 的值.



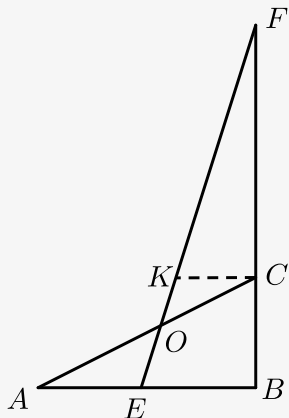
(2) 如图, 作 $EH \perp AC$ 于点 H , 请求出 OH 的长度.



(3) 设线段 EF 的中点为 P , 当 E 点从 A 运动到 B 点, 请直接写出 P 点的路径长 _____.

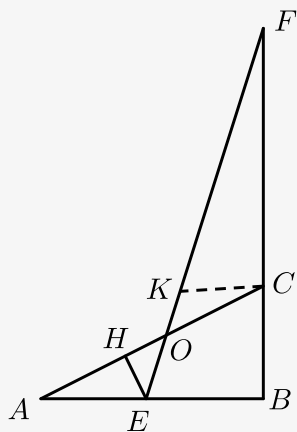
【答案】 (1) $\frac{3}{2}$.
 (2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
 (3) $2\sqrt{5}$

【解析】 (1) 过 C 作 $CK \parallel AB$ 交 EF 于 K ,
 $\therefore \frac{CK}{AE} = \frac{OC}{OA} = 1$,
 $\therefore CK = AE = t$,
 $\because CK \parallel BE$,
 $\therefore \frac{CK}{BE} = \frac{CF}{BF}$,
 $\therefore \frac{t}{4-t} = \frac{2t}{2+t} \Rightarrow 4t = 6 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$.
 故答案为: $\frac{3}{2}$.



(2) 过 C 作 $CK \parallel AB$ 交 EF 于 K ,
 $\frac{CK}{BE} = \frac{CF}{BF} = \frac{2t}{2t+2} = \frac{t}{t+1}$,
 $\therefore CK = \frac{t(4-t)}{t+1}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{CO}{AO} &= \frac{CK}{AE} = \frac{4-t}{1+t}, \quad \frac{OA}{OC} = \frac{1+t}{4-t}, \\ \therefore OA &= \frac{1+t}{5} AC, \\ \therefore \angle B &= 90^\circ, \\ \therefore AC &= \sqrt{BC^2 + AB^2} = 2\sqrt{5}, \\ \therefore OA &= \frac{2\sqrt{5}}{5}(1+t), \\ \text{又} \therefore AH &= \frac{2}{5}\sqrt{5}t, \\ \therefore OH &= \frac{2\sqrt{5}}{5}. \\ \text{故答案为: } &\frac{2\sqrt{5}}{5}.\end{aligned}$$



(3) 建系法：以B为原点、直线AB为x轴、BF为y轴建立坐标系，

$$\begin{aligned}F(0, 2t+2), \quad E(t-4, 0), \\ \therefore P\left(\frac{1}{2}t-2, t+1\right), \\ P \text{ 的轨迹: } \begin{cases} x = \frac{1}{2}t-2 \\ y = t+1 \end{cases} \Rightarrow y = 2x+5 \\ \therefore P \text{ 的轨迹是直线,} \\ \therefore 0 \leq t \leq 4, \\ \therefore P_1(-2, 1), \quad P_2(0, 5), \\ \therefore P_1P_2 = 2\sqrt{5}. \\ \text{故答案为: } 2\sqrt{5}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似模型的构造和应用

19. 在一节数学课上，老师出示了这样一个问题让学生探究：

已知：如图在 $\triangle ABC$ 中，点D是BA边延长线上一动点，点F在BC上，且 $\frac{CF}{BF} = \frac{1}{2}$ ，连接DF交AC于点E。

(1) 如图1，当点E恰为DF的中点时，请求出 $\frac{AD}{AB}$ 的值。

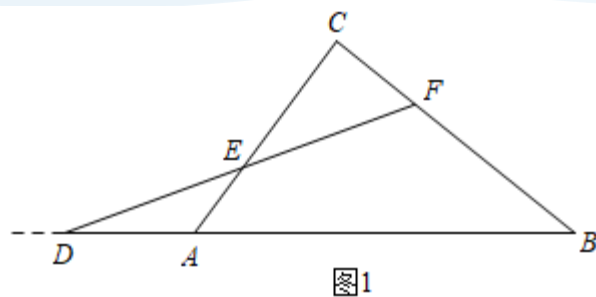


图1

(2) 如图2, 当 $\frac{DE}{EF} = a (a > 0)$ 时, 请求出 $\frac{AD}{AB}$ 的值 (用含 a 的代数式表示)。

思考片刻后, 同学们纷纷表达自己的想法:

甲: 过点 F 作 $FG \parallel AB$ 交 AC 于点 G , 构造相似三角形解决问题;

乙: 过点 F 作 $FG \parallel AC$ 交 AB 于点 G , 构造相似三角形解决问题;

丙: 过点 D 作 $DG \parallel BC$ 交 CA 延长线于点 G , 构造相似三角形解决问题;

老师说: “这三位同学的想法都可以”。

请参考上面某一种想法, 完成第(1)问的求解过程, 并直接写出第(2)问 $\frac{AD}{AB}$ 的值。

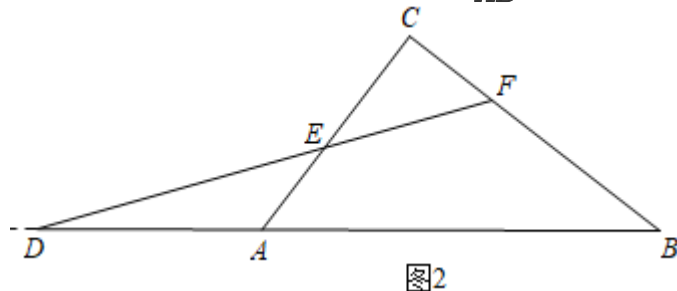


图2

【答案】(1) $\frac{1}{3}$ 。

(2) $\frac{AD}{AB} = \frac{a}{3}$ 。

【解析】(1) 甲同学的想法: 过点 F 作 $FG \parallel AB$ 交 AC 于点 G 。

$$\therefore \angle GFE = \angle ADE, \angle FGE = \angle DAE,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle GEF.$$

$$\therefore \frac{AD}{GF} = \frac{ED}{EF}.$$

$$\therefore E \text{ 为 } DF \text{ 的中点},$$

$$\therefore ED = EF.$$

$$\therefore AD = GF.$$

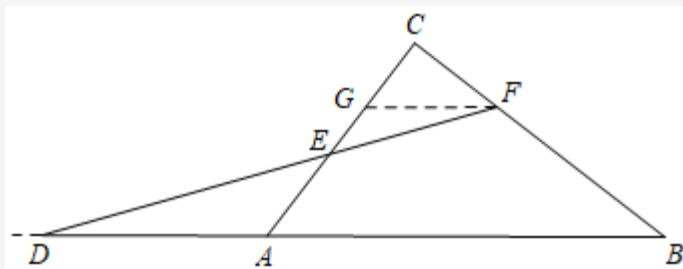
$$\therefore FG \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CGF \sim \triangle CAB.$$

$$\therefore \frac{GF}{AB} = \frac{CF}{CB}.$$

$$\therefore \frac{BF}{CF} = \frac{2}{1},$$

$$\therefore \frac{CF}{CB} = \frac{1}{3}.$$



$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{GF}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{3}.$$

乙同学的想法：过点F作FG//AC交AB于点G.

$$\therefore \frac{AD}{AG} = \frac{ED}{EF}.$$

$\therefore E$ 为DF的中点,

$$\therefore ED = EF.$$

$$\therefore AD = AG.$$

$\therefore FG \parallel AC,$

$$\therefore \frac{AG}{AB} = \frac{CF}{CB}.$$

$$\therefore \frac{CF}{CB} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \frac{BF}{CF} = \frac{2}{1}.$$

$$\therefore \frac{CB}{CF} = \frac{3}{1}.$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{3}.$$

丙同学的想法：过点D作DG//BC交CA延长线于点G.

$$\therefore \angle C = \angle G, \angle CFE = \angle GDE,$$

$$\therefore \triangle GDE \sim \triangle CFE.$$

$$\therefore \frac{GD}{CF} = \frac{ED}{EF}.$$

$\therefore E$ 为DF的中点,

$$\therefore ED = EF.$$

$$\therefore DG = FC.$$

$\therefore DG \parallel BC,$

$$\therefore \angle C = \angle G,$$

$$\angle B = \angle ADG,$$

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABC.$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DG}{BC}.$$

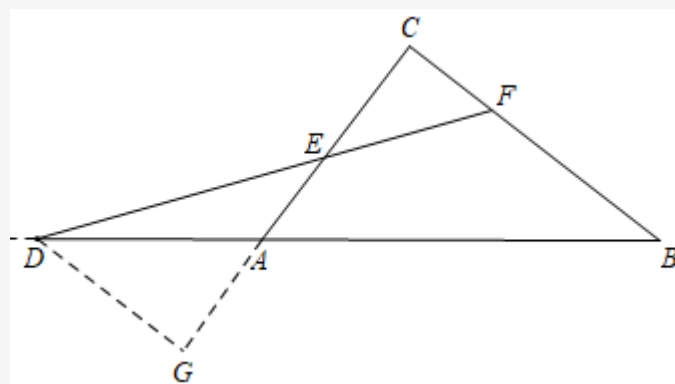
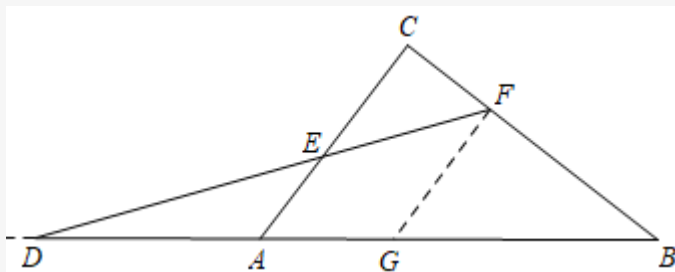
$$\therefore \frac{CF}{CB} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \frac{BF}{CF} = \frac{2}{1}.$$

$$\therefore \frac{BC}{CF} = \frac{3}{1}.$$

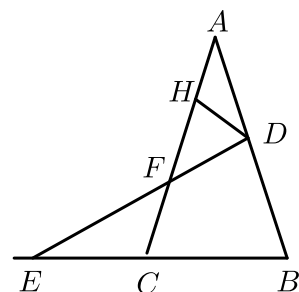
$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DG}{BC} = \frac{CF}{BC} = \frac{1}{3}.$$

(2) 过程同(1).



【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 为 AB 边上一点， E 为 BC 延长线上一点， DE 交 AC 于点 F ，点 H 是线段 AF 上一点，若 $\angle ADH = \angle BAC = 36^\circ$ ，记 $\frac{BC}{AB} = m$ ，且 $AD = CE$ ，试用含 m 的代数式表示 $\frac{AC}{HF}$ 。



【答案】 $\frac{m+1}{m}$.

【解析】 过D作 $DK \parallel BC$ 交AC于K ,

$$\therefore \angle AKD = \angle ADK = \angle B = 72^\circ ,$$

$$\text{又 } \angle A = \angle A ,$$

$$\therefore \triangle AKD \sim \triangle ACB ,$$

$$\therefore \frac{KD}{AK} = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AB} .$$

$$\therefore \angle AKD = \angle ADK = \angle B = 72^\circ ,$$

$$\therefore \angle KDH = \angle A = 36^\circ ,$$

$$\therefore \triangle HKD \sim \triangle DKA ,$$

$$\therefore \frac{HK}{KD} = \frac{KD}{AK} = \frac{BC}{AB} = m ,$$

$$\frac{HD}{KD} = \frac{DA}{KA} = 1 ,$$

$$\therefore HD = KD ,$$

$$\text{又 } \angle ADH = \angle BAC ,$$

$$\therefore HD = AH ,$$

$$\therefore AH = KD ,$$

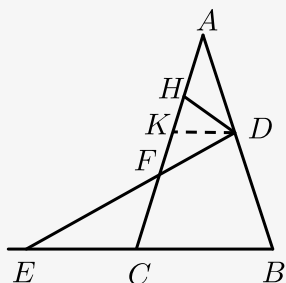
$$\therefore \frac{HK}{KF} = \frac{HK}{KD} = m .$$

$$\text{又 } \frac{CF}{KF} = \frac{CE}{KE} = \frac{AD}{AE} = m ,$$

$$\therefore \frac{HK}{AH} = \frac{CF}{AH + CF} = \frac{HK + FK}{AH + CF} = \frac{HF}{AH + CF} = m ,$$

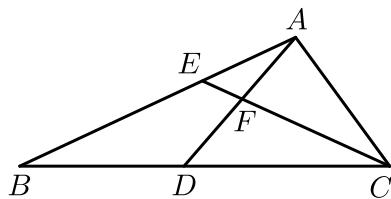
$$\therefore \frac{HF}{AH + CF} = \frac{1}{m} ,$$

$$\therefore \frac{AC}{HF} = \frac{AH + HF + CF}{HF} = 1 + \frac{1}{m} = \frac{m+1}{m} .$$



【标注】【知识点】相似模型的构造和应用

21. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AB 上， $BD = AD = AC$ ， AD 与 CE 相交于点 F ， $AE^2 = EF \cdot EC$ 。



(1) 求证： $\angle ADC = \angle DCE + \angle EAF$ 。

(2) 求证： $AF \cdot AD = AB \cdot EF$ 。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】(1) $\because BD = AD = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle BAD, \angle ADC = \angle ACD,$$

$$\because AE^2 = EF \cdot EC,$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{EF}{AE},$$

$$\therefore \angle AEF = \angle CEA,$$

$$\therefore \triangle EAF \sim \triangle ECA,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle ECA,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACD = \angle ACE + \angle ECB = \angle DCE + \angle EAF.$$

(2) $\because \triangle EAF \sim \triangle ECA$,

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{AC}{AF}, \text{ 即 } \frac{AF}{EF} = \frac{AC}{AE},$$

$$\therefore \angle EFA = \angle BAC, \angle EAF = \angle B,$$

$$\therefore \triangle FAE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{FA}{AB} = \frac{EF}{AC},$$

$$\therefore FA \cdot AC = EF \cdot AB,$$

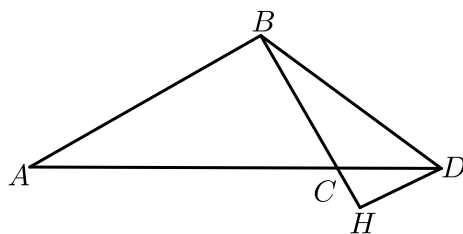
$$\because AC = AD,$$

$$\therefore AF \cdot AD = AB \cdot EF.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

22.

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $BC = 3$ ， D 为 AC 延长线上一点， $AC = 3CD$ ．过点 D 作 $DH \parallel AB$ ，交 BC 的延长线于点 H ．



若 $\angle CBD = \angle A$ ，求 AB 的长．

【答案】 (1) $AB = 6$.

【解析】 (1) 方法一： $\because \angle A = \angle CBD$ ， $\angle ABC = \angle BHD$ ，

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BHD,$$

$$\therefore \frac{BC}{HD} = \frac{AB}{BH}, \because \triangle ABC \sim \triangle DHC,$$

$$\therefore \frac{HD}{AB} = \frac{BH}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AB = 3DH,$$

$$\therefore \frac{3}{DH} = \frac{3DH}{4}, DH = 2,$$

$$\therefore AB = 6.$$

方法二：

$$\because \angle CDE = \angle A, \angle D = \angle D,$$

$$\therefore \triangle CDB \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{BD}{AD}, \text{ 即 } BD^2 = CD \cdot AD,$$

$$\therefore BD^2 = CD \cdot 4CD = 4CD^2,$$

$$\therefore BD = 2CD.$$

$$\because \triangle CDB \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{BC}{AB},$$

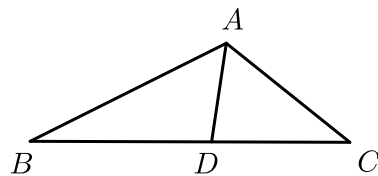
$$\therefore \frac{CD}{2CD} = \frac{3}{AB},$$

$$\therefore AB = 6.$$

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

23. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 120^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ．求证：

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$



【答案】 $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

【解析】 分别过 B, C 两点做 AD 的平行线, 分别交 CA, BA 的延长线于 E, F 两点 .

$$\because EB \parallel AD \parallel FC ,$$

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle CEB ,$$

$$\triangle BAD \sim \triangle AFC ,$$

$$\triangle ABE \sim \triangle AFC ,$$

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{CD}{CB} , \frac{AD}{CF} = \frac{BD}{BC} ,$$

$$\therefore \frac{AD}{BE} + \frac{AD}{CF} = \frac{CD}{BC} + \frac{BD}{BC} = 1 ,$$

$$\therefore \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{AD} ,$$

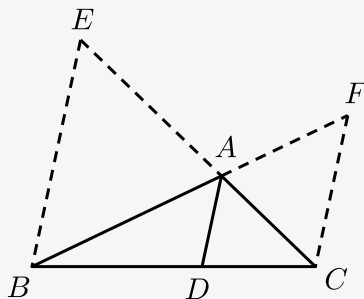
$$\because \angle EBA = \angle BAD = 60^\circ ,$$

$$\angle EAB = 180^\circ - \angle BAC = 60^\circ$$

$\therefore \triangle EAB$ 为正三角形, 同理 $\triangle FAC$ 亦为正三角形 .

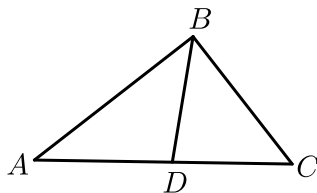
$$\text{则 } BE = AB , FC = AC ,$$

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} .$$



【标注】 【知识点】相似模型的构造和应用

24. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$.



(1) 当点 D 在斜边 AB 内部时, 求证: $\frac{CD^2 - BD^2}{BC^2} = \frac{AD - BD}{AB}$.

(2) 当点 D 与点 A 重合时, 第(1)小题中的等式是否存在? 请说明理由 .

(3) 当点 D 在 BA 的延长线上时, (1)中的等式是否存在? 请说明理由 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 成立 .

(3) 不成立 .

【解析】(1) 作 $DE \perp BC$ ，垂足为 E 。

由勾股定理得

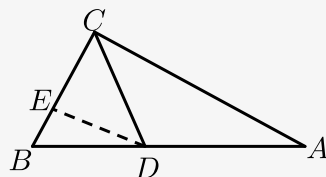
$$CD^2 - BD^2 = (CE^2 + DE^2) - (BE^2 + DE^2)$$

$$= CE^2 - BE^2 = (CE - BE)BC.$$

$$\text{所以 } \frac{CD^2 - BD^2}{BC^2} = \frac{CE - BE}{BC} = \frac{CE}{BC} - \frac{BE}{BC}.$$

$$\text{因为 } DE \parallel AC, \text{ 所以 } \frac{CE}{BC} = \frac{AD}{AB}, \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{AB}.$$

$$\text{故 } \frac{CD^2 - BD^2}{BC^2} = \frac{AD}{AB} - \frac{BD}{AB} = \frac{AD - BD}{AB}.$$



(2) 当点 D 与点 A 重合时，第(1)小题中的等式仍然成立。此时有

$$AD = 0, CD = AC, BD = AB.$$

$$\text{所以 } \frac{CD^2 - BD^2}{BC^2} = \frac{AC^2 - AB^2}{BC^2} = \frac{-BC^2}{BC^2} = -1,$$

$$\frac{AD - BD}{AB} = \frac{-AB}{AB} = -1.$$

从而第(1)小题中的等式成立。

(3) 当点 D 在 BA 的延长线上时，第(1)小题中的等式不成立。

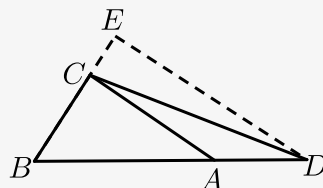
作 $DE \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 E ，

$$\text{则 } \frac{CD^2 - BD^2}{BC^2} = \frac{CE^2 - BE^2}{BC^2}$$

$$= \frac{CE + BE}{BC} = -1 - \frac{BC}{BC},$$

$$\text{而 } \frac{AD - BD}{AB} = \frac{-AB}{AB} = -1,$$

$$\text{所以 } \frac{AD - BD}{AB} \neq \frac{CD^2 - BD^2}{BC^2}$$

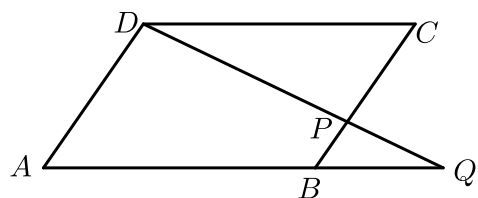


【标注】【知识点】相似模型的构造和应用

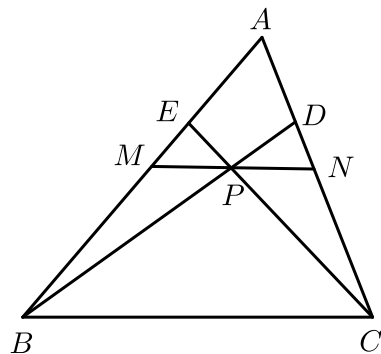
25. 证明下列命题。

(1) 已知 P 为平行四边形 $ABCD$ 边 BC 上任意一点， DP 交 AB 的延长线于 Q 点，求证：

$$\frac{BC}{BP} - \frac{AB}{BQ} = 1.$$



- (2) 已知：P为 $\triangle ABC$ 的中位线MN上任意一点，BP、CP的延长线分别交对边AC、AB于D、E，求证： $\frac{AD}{DC} + \frac{AE}{EB} = 1$ 。



【答案】(1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】(1) $\because ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{BC}{BP} = \frac{AD}{BP} = \frac{AQ}{BQ},$$

$$\therefore \frac{BC}{BP} - \frac{AB}{BQ} = \frac{AQ}{BQ} - \frac{AB}{BQ} = \frac{AQ - AB}{BQ} = \frac{BQ}{BQ} = 1.$$

(2) 延长BD、CE分别交过A的平行于BC的直线于RQ两点，

$$\because QR \parallel MN \parallel BC, \text{ 且 } AM = BM,$$

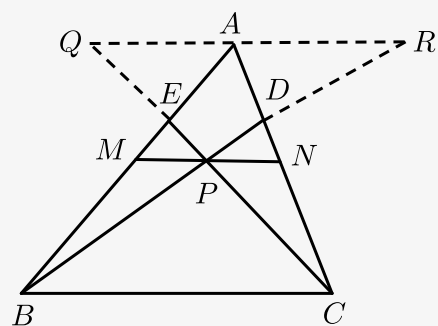
$$\therefore PQ = PC, PR = PB,$$

$$\text{又} \because \angle QPR = \angle CPB,$$

$$\therefore \triangle PQR \cong \triangle PCB, \text{ 可得 } QR = BC,$$

$$\text{又} \because \frac{AD}{DC} = \frac{AR}{BC}, \frac{AE}{EB} = \frac{AQ}{BC},$$

$$\therefore \frac{AD}{DC} + \frac{AE}{EB} = \frac{AR}{BC} + \frac{AQ}{BC} = \frac{AR + AQ}{BC} = \frac{RQ}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$



【标注】【知识点】相似模型的构造和应用